İkilineer Formlar (Biçimler):

Tanım: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V üzerinde bir ikilineer form aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonudur.

1) $u, v, w, z \in V$ ve $k \in \mathbb{R}$ için

$$f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w) \text{ ve}$$

$$f(k.u, w) = k.f(u, w)$$

2) $f(u, w+z) = f(u, w) + f(u, z)$ ve

$$f(u, k.w) = k.f(u, w)$$

(1) ve (2) no.lu şartlara sırasıyla 1. ve 2. değişkenlere göre lineerlik şartları denir.

Örnek: ϕ ve σ V üzerinde birer lineer form ise

$$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\underline{u}, \underline{v}) = \phi(u) \cdot \sigma(v)$$

fonksiyonu V üzerinde bir ikilineer biçimdir.

1) $f(u+v, w) = \phi(u+v) \cdot \sigma(w)$

$= (\phi(u) + \phi(v)) \cdot \sigma(w)$

$= \phi(u) \cdot \sigma(w) + \phi(v) \cdot \sigma(w)$

$= f(u, w) + f(v, w)$ ✓

$f(k.u, v) = \phi(k.u) \cdot \sigma(v) = k \cdot \phi(u) \cdot \sigma(v)$

$= k \cdot f(u, v)$

Benzer şekilde 2. değişkene göre lineerlik şartlarının sağlandığı gösterilebilir.

Örnek: f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde standart iç çarpım olsun.

$$f(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

fonksiyonu bir ikilineer formdur.

Örnek: $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathbb{R}^n$ de A ile bir ikilineer form şu şekilde tanımlanabilir:

$X, Y \in \mathbb{R}^n$ için ($\mathbb{R}^n = n \times 1$ vektörler)

$$f(X,Y) = X^T A \cdot Y$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Bir ikilineer formdur:

1) $X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^n$

$$f(X_1 + X_2, Y) = (X_1 + X_2)^T A \cdot Y$$
$$= (X_1^T + X_2^T) \cdot A \cdot Y$$
$$= X_1^T A Y + X_2^T A Y$$
$$= f(X_1, Y) + f(X_2, Y)$$

$$f(kX, Y) = (k.X)^T . A . Y$$
$$= k . X^T . A . Y$$
$$= k . f(X, Y)$$

2. değişkene göre lineerlik benzer.

Örnek: $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$

olmak üzere

$$f(u,v) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3$$
$$+ 4x_3y_2 - x_3y_3$$

bilineer formunun matris gösterimini bulunuz:

$$f(u,v) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$$

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -8 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

V üzerindeki ikilineer formlar $B(V)$ ile gösterilir. $B(V)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma aşağıdaki gibi tanımlanır:

1) $f, g \in B(V)$ ise her $(u,v) \in V \times V$ için

$$(f+g)(u,v) := f(u,v) + g(u,v)$$

2) $k \in \mathbb{R}$ için

$$(k \cdot f)(u,v) := k \cdot [f(u,v)]$$

Bu toplam ve skalerle çarpma işlemleriyle $B(V)$ bir vektör uzayıdır.

Teorem: V n boyutlu bir vektör uzayı olsun. $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ V^* in bir bazı olsun.

Bu durumda

$$f_{ij} := \phi_i \cdot \phi_j$$

olmak üzere $\{f_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ kümesi $B(V)$ nin bir bazıdır. boy $B(V) = n^2$.

İspat: $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$; $\{\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n\}$ in duali olduğu V bazı olsun.

$\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ kümesi $B(V)$ yi gerer.

$f \in B(V)$ alalım. $f(u_i, u_j) = a_{ij}$ olsun.

$$\boxed{f = \sum \underbrace{a_{ij} f_{ij}} \text{ dir.}}$$

$f(u_s, u_t) = a_{st}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}(u_s, u_t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{\phi_i(u_s)}_{\delta_{is}} \underbrace{\phi_j(u_t)}_{\delta_{jt}}$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \delta_{is} \delta_{jt} \underset{\substack{i=s \\ j=t}}{=} a_{s.t}\, \delta_{ss}\, \delta_{tt} = a_{st}$$

$\{f_{ij}\}$ kümesi $B(V)$ yi gerer.

$\{f_{ij}\}$ lineer bağımsızdır:

$\sum a_{ij} f_{ij} = 0$ olsun.

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}(u_s, u_t)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{is} \delta_{jt}$$

$$= a_{st} = 0$$

$\{f_{ij}\}$ lineer bağımsızdır.

$|\{f_{ij}\}| = n^2 \Rightarrow \text{boy}\, B(V) = n^2.$

İkilineer Formlar ve Matrisler:

f, V üzerinde bir ikilineer form ve

$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ V nin bir bazı olsun.

$u, v \in V$ için

$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ ve

$v = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_nv_n$ olsun.

$$f(u,v) = f(a_1\underline{\underline{u_1}} + \ldots + a_nu_n,\ b_1u_1 + \ldots + b_nu_n)$$

$$= a_1b_1f(u_1,u_1) + a_1b_2f(u_1,u_2) + \ldots + a_1b_n f(u_1,u_n)$$

$$+ \ldots +$$

$$a_nb_1f(u_n,u_1) + a_nb_2f(u_n,u_2) + \ldots + a_nb_n f(u_n,u_n)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_i b_j \underbrace{f(u_i, u_j)}$$

Böylece f, n^2 adet $f(u_i, u_j)$ değeriyle tamamen belirlenir.

$a_{ij} := f(u_i, u_j)$ ile tanımlar ve $A = [a_{ij}]$ matrisini oluşturursak

f,

$$f(u, v) = [u]_S^T \cdot A \cdot [v]_S$$

$a_1, \dots, a_n$

b_1
$\vdots$
b_n

$A=[a_{ij}]$ matrisine f in S bazına göre temsilcisi denir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir ikilineer form;

$(2,1)$
$(2,1)$

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

$\cancel{(2,1)}$ $(1,-1)$ $2+3+1$

olsun.

a) f in $\{u_1=(1,0),\ u_2=(1,1)\}$ bazına göre temsilcisini bulunuz.

$a_{21}=f(u_2,u_1)$
$=2$

$A=[a_{ij}]$, $\quad a_{ij}=f(u_i,u_j)$

$a_{22}=f(u_2,u_2)$
$=2-3+1$
$=0$

$a_{11}=f(u_1,u_1)=2$

2×2

$a_{12}=f(u_1,u_2)=2-3=-1$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ buluruz. (f in S bazına göre temsilcisi.)

b) f in $T = \{ v_1 = (2,1) \ , v_2 = (1,-1) \}$ bazına göre temsilcisini bulunuz.

$A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = f(v_i, v_j)$; $1 \leq i, j \leq 2$

$a_{11} = f(v_1, v_1) = 8 - 6 + 1 = 3$

$a_{12} = f(v_1, v_2) = 4 + 6 - 1 = 9$

$a_{21} = f(v_2, v_1) = 4 - 3 - 1 = 0$

$a_{22} = f(v_2, v_2) = 2 + 3 + 1 = 6$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, f in T bazına göre temsilcisi.

$f(\overset{u}{(3,0)},\overset{v}{(-1,-2)})$ değerini A nın T bazına göre temsilcisini kullanarak bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$f(u,v) = [u]_T^T \, A \cdot [v]_T$$

$$[u]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1 + v_2$$

$$[v]_T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -v_1 + v_2$$

$$f(u,v) = [1 \;\; 1] \, A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [3 \;\; 15] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{12} \;\checkmark$$

$$f((3,0),(-1,-2)) = -6 + 18 + 0 = \underline{12} \;\checkmark$$

$$2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$