T.1: $f_{ij}(u,v) = \phi_i(u) \cdot \phi_j(v)$

$\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ $B(V)$ için bir bazdır.

Teorem 2: f, n boyutlu V uzayı üzerinde bir ikilineer formu; S ve S' V nin iki sıralı bazı olsun. f in S bazına göre temsilcisi A ise $P = P_{S \leftarrow S'}$ olmak üzere f in S' bazına göre temsilcisi

$$B = P^T \cdot A \cdot P$$ dir.

İspat: A, S bazına göre f in temsilcisi ise $u, v \in V$ için

$$f(u,v) = [u]_S^T \cdot A \cdot [v]_S \text{ tir.}$$

$$[\quad] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$P_{S \leftarrow S'} \cdot [u]_{S'} = [u]_S \leftarrow$$

$$P_{S \leftarrow S'} \cdot [v]_{S'} = [v]_S \leftarrow$$

$$f(u,v) = [u]_S^T \cdot A \cdot [v]_S = \underbrace{\left[P \cdot [u]_{S'}\right]^T}_{[A.B]^T = B^T . A^T} \cdot A \cdot \left[P \cdot [v]_{S'}\right]$$

$$= [u]_{S'}^T \cdot \underbrace{P^T \cdot A \cdot P}_{B} \cdot [v]_{S'}$$

$$B = P^T \cdot A \cdot P$$

S' bazına göre temsilcisi

Örnek: $f((x_1,x_2),(y_1,y_2))$

$= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$

f in $\{u_1=(1,0), u_2=(1,1)\} = S$ baz. göre tems. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ A

f in $\{v_1=(2,1), v_2=(1,-1)\} = S'$ $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ B

$B = P^T A . P$

$B = P^T A . P_{S \leftarrow S'}$

$S' \to S$ matrisi için (S')'nün vektörleri S bazının vektörleri cinsinden yazılır.

$a_1u_1 + a_2u_2 = v_1 \,;\, v_2$

$a_1 + a_2 = 2 \,;\, 1$

$0.a_1 + a_2 = 1 \,;\, -1$

$$\begin{array}{l|l} a_1 + a_2 = 2 & 1 \\ 0 \cdot a_1 + a_2 = 1 & -1 \end{array}$$

$$[v_1]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[v_2]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_{S \leftarrow S'} = \Big[[v_1]_S \,\Big|\, [v_2]_S \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \checkmark$$

Tanım: A ve B $n \times n$ tipinde ve singüler olmayan bir P için $(n \times n)$

$$B = P^T . A . P$$

sağlanıyorsa A ve B birbirine kongrüanttır denir. Böylece aynı ikilineer formun farklı bazlara göre temsilcileri birbirine kongrüanttır.

Tanım: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve f, V üzerinde bir ikilineer form ise f in herhangi bir temsilcisinin rankına f in rankı denir.

Eğer rank(f) = boy$V$ ise f e dejenere olmayan, eğer rank(f) < boy$V$ ise f e dejenere bir ikilineer biçimdir denir.

Simetrik İkilineer Biçimler:

Tanım: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, f V üzerinde bir ikilineer form ve her $u, v \in V$ için

$$f(u, v) = f(v, u)$$

oluyorsa f e bir simetrik ikilineer biçim denir. Eğer A f in, V nin bir S bazına göre temsilcisi ise

$$f(u,v) = [u]_S^T \cdot A \cdot [v]_S$$

$$= \left[[u]_S^T \cdot A \cdot [v]_S \right]^T$$

$$f(u,v) = [v]_S^T \cdot A^T \cdot [u]_S$$

f simetrik ise

$$\underbrace{[v]_S^T A^T [u]_S} = f(u,v) = f(v,u) = \underbrace{[v]_S^T \cdot A \cdot [u]_S}$$

her $u,v \in V$ için doğrudur.

$[u]_S = e_j$, $[v]_S = e_i$ alırsak

$$[v]_S^T \cdot A^T \cdot [u]_S = a_{ij}^T$$

$$[\,\cdot\ 1\ 0\ \cdot\,] \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{ji}$$

$$[x]\, A \,[y] = \sum A_{ij}\, x_i\, y_j$$

$$\underbrace{[v]_s^T \cdot A \cdot [u]_s} = a_{ij}$$

$[v]_s = e_i$

$[u]_s = e_j$

$$\underline{[v]_s^T A^T [u]_s} = \underline{[v]_s^T A [u]_s}$$

$$\downarrow$$

$$a_{ij}^T = a_{ji} = a_{ij}$$

Böylece A simetrik olur.

Teorem 3: V sonlu boyutlu reel bir vektör uzayı ve f V üzerinde bir simetrik ikili form ise, V nin öyle bir bazı vardır ki f in bu baza göre temsilcisi köşegensel bir matristir.

$P^T A P = D$

Bir simetrik matrisin kongrüant olduğu bir köşegensel matrisin bulunuşu:

A herhangi bir simetrik matris olsun.

Adım 1: $M = [A \,\vdots\, I_n]$ matrisi oluşturulur.

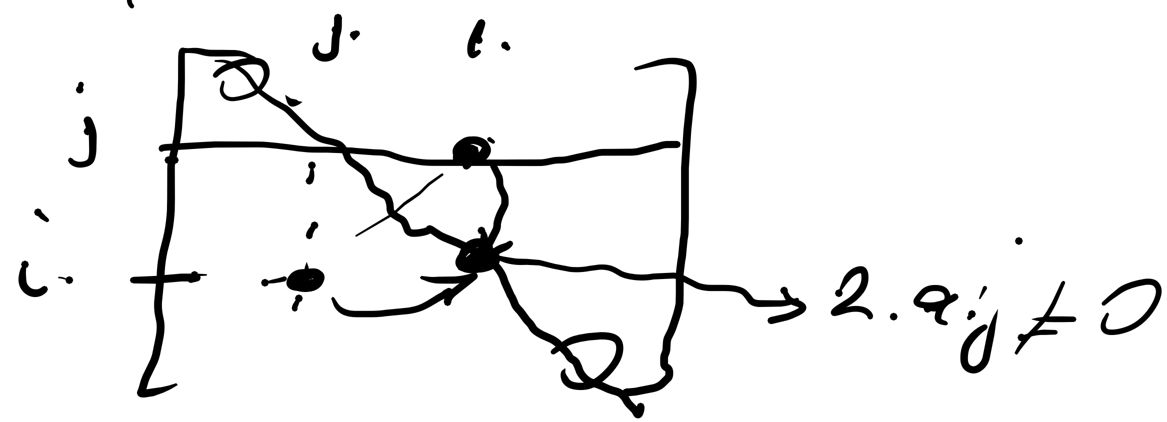
Adım 2: a_{11} terimi için üç durum vardır:

Durum 1: $a_{11} \neq 0$ ise;

Bu durumda a_{11} pivot olarak kullanılır ve altındaki tüm terimler 0 yapılır. Aynı şekilde a_{11} in sağındaki tüm terimler sıfırlanır.

Durum 2: $a_{11} = 0$ fakat $a_{kk} \neq 0$ olan bir terim vardır. 1. ve k. satırlar yer değiştirir sonra 1. ve k. sütunlar yer değiştirilerek $a_{11} \neq 0$ olur. Durum 1 e indirgenmiştir.

Durum 3: $a_{11} = 0$ ve diğer tüm köşegensel terimler 0; fakat $a_{ij} \neq 0$ bir a_{ij} $(i \neq j)$ terimi vardır. Bu durumda j. satır i. satıra; sonra j. sütun i. sütuna toplanır ve $a_{ii} = 2 \cdot a_{ij} \neq 0$ terimi elde edilir. Böylece Durum 2 ye indirgenmiş olur.



Adım 3: Sağ altta kalan A_k matrisine, A köşegenleştirilinceye kadar Adım 2 tekrar edilir.

Adım 4: $M = [\overset{\text{köşegensel}}{D} \,\vdots\, Q]$ elde edilince

$P = Q^T$ alırsak $D = \underline{P^T} . A . P$ olur.

Uyarı: $M = [A \,\vdots\, I_n]$ matrisinde; A ya uygulanan satır işlemleri sağ tarafa da uygulanırken; sütun işlemleri uygulanmaz.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

için singüler olmayan bir P ve $P^T . A . P = D$ köşegensel matrisi bulunuz.

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} -2S_1 + S_2 \to S_2 \\ 3S_1 + S_3 \to S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} -2C_1 + C_2 \to C_2 \\ 3C_1 + C_3 \to C_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-2S_2 + S_3 \to S_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$-2C_2 + C_3 \to C_3 \quad \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix}}_{D} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{Q = P^T}\right]$$

$$D = P^T \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

simetrik mat. için sing. olmayan bir P ve $P^T . A . P = D$ köşegensel matris bulunuz

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} 3S_1+S_2 \to S_2 \\ -2S_1+S_3 \to S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} 3S_1+S_2\to S_2 \\ -2S_1+S_3\to S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{l} 3C_1+C_2\to C_2 \\ -2C_1+C_3\to C_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{2}S_2+S_3\to S_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P^T} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 9/2 \end{bmatrix}$$

Tanım: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, f V üzerinde bir simetrik ikilineer form olmak üzere

$$q: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto f(u,u)$$

ile tanımlanan q fonksiyonuna; "f ile tanımlanan kuadratik form" denir.

Eğer f 'i temsil eden simetrik matris-lerden biri A ise

$$q(X) = f(X, X) = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \cdot x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

$$+ 2 \cdot \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

gösterimine sahiptir. Bu gösterime A ya karşılık gelen kuadratik polinom denir.

$\mathbb{R}$ üzerinde $f(u,v)$ bir simetrik ikilineer form ve $q(v)$ karşılık gelen kuadratik form ise $\mathbb{R}$ üzerinde

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\Big(q(u+v) - q(u) - q(v) \Big)$$

sağlanır. (f in kutupsal gösterimi).

Örnek: Aşağıdaki kuadratik formlara karşılık gelen simetrik matrisleri bulunuz.

a) $q(x,y,z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (x,y,z)\, A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Big)$$

b) $q(x,y,z) = 2x^2 - 5y^2 - 7z^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

c) $q(x,y,z) = 3x^2 + xz - 2yz$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$